Литература

1. R. Kühnau. *The conformal module of quadrilaterals and of rings.* In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, (ed. by R. Kühnau) Vol. 2. North Holland, Amsterdam: Elsevier, 2005, 99–129.

2. Nasyrov S.R. *Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames* // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – V. 15. – No 1. – P. 59–74.

3. Даутова Д. Н., Насыров С. Р. *Асимптотика модулей зеркально симметричных двусвязных областей при растяжении* // Матем. заметки. – 2018. (в печати).

4. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966.

5. Суворов Г. Д. *Простые концы и последовательности плоских отображений.* – Киев: Наукова думка, 1986.

6. Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей.* – Казань: Магариф, 2008.

ASYMPTOTICS OF MODULUS OF DOUBLY CONNECTED DOMAIN
STRETCHED ALONG THE REAL AXIS

D.N. Dautova, S.R. Nasyrov

We investigate asymptotical behavior of the conformal modulus of a doubly connected domain stretched along the real axis. We obtained a generalization of classical Rado's theorem which allows us to substantiate the desired asymptotic formula, already established for symmetric domains. This gives an answer to the problem by Prof. M. Vuorinen.

Keywords: conformal modulus, double connected domain, quadrilateral, quasiconformal mapping, convergence to a kernel, prime ends of a plane domain.

УДК 517.51

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РЕШЕНИЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

С.Р. Еникеева[1]

1 *enikeeva.svetlana@mail.ru*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

В статье предложено теоретическое обоснование метода наименьших квадратов для слабо сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: слабо сингулярное интегральное уравнение, метод наименьших квадратов, полиномиальное приближение, сходимость метода.

Многочисленные прикладные и теоретические задачи математики, механики, физики, химии и техники приводят к необходимости решения различных классов интегральных уравнений с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора.

Рассмотрим слабо сингулярное интегральное уравнение первого рода вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)\ln|\tau - t|x(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = y(t),\ -1 \le t \le 1. \quad (1)$$

Здесь $h(t,\tau)$ и $y(t)$ – известные функции, $x(\tau)$ – искомая функция, а $p(t)$ – весовая функция Чебышева третьего или четвертого рода: $p(t)=\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}$.

Такие уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому возникает необходимость развития приближенных методов их решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Для этих целей ниже мы используем подход, предложенный в [1, 2] (и используемый, например в [3,4]), основанный на соответствующем выборе пространств правых частей (мы обозначим это пространство через Y) и искомых элементов X. Тогда K можно рассматривать как обратимый линейный оператор, действующий из $X=L_{2,p}(-1,1)$ в $Y=W^1_{2,q}[-1,1]$, где $q=1/p, W^1_{2,q}[-1,1]=\{\varphi(s)\in C[-1,1]:\exists\varphi'(s)\in L_{2,q}(-1,1)\}$. В этом случае задача решения слабо сингулярного интегрального уравнения (1) является корректно поставленной.

Пусть далее весовая функция $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ – система ортогональных полиномов для этого веса. Известно, что в этом случае $P_k(t)=\frac{T_{k+1}(t)-T_k(t)}{t-1}$, $k\ge 1$, где $T_k(t)=\cos(k\arccos\, t)$ – полином Чебышева первого рода.

Приведем вычислительную схему и теоретическое обоснование метода наименьших квадратов. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде полинома

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k P_{k-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k t^{k-1}. \tag{2}$$

Неизвестные постоянные α_k,β_k определяются из условия:

$$\|y-Kx_n\|_Y^2\Rightarrow\min.$$

А это, как известно, приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений (сокращенно, СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(KP_{k-1},KP_{j-1})_Y=(y,KP_{j-1})_Y,\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где для любых $\varphi,\psi\in Y$ полагаем $(\varphi,\psi)_Y=(\varphi,\psi)_{2,p}+(\varphi',\psi')_{2,q}$, $(\varphi,\psi)_{2,p}=\int\limits_{-1}^{+1}p(t)\varphi(t)\psi(t)\,dt$, $(\varphi',\psi')_{2,q}=\int\limits_{-1}^{+1}q(t)\varphi'(t)\psi'(t)\,dt$.

Тогда Y превращается в гильбертово пространство с нормой $\|\varphi\|_Y=\sqrt{\|\varphi\|^2_{2,p}+\|\varphi'\|^2_{2,q}}$.

Обозначим через H оператор, задаваемый вторым интегралом в левой части уравнения (1).

Теорема. *Пусть оператор $K:X\to Y$ непрерывно обратим, а ядро $h(t,\tau)$ таково, что оператор $H:X\to Y$ непрерывен. Тогда при всех натуральных n СЛАУ (3) имеет единственное решение $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\dots,\alpha_n^*$ ($\beta_1^*,\beta_2^*,\dots,\beta_n^*$) при любых $n=1,2,\dots$ Приближенное решение $x_n^*(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^*P_{k-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^*t^{k-1}$ при $n\to\infty$ сходится к точному решению $x^*(t)=(K^{-1}y)(t)$ уравнения (1) в пространстве $X=L_{2,p}(-1,1)$. Погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством*

$$\|x^*-x_n^*\|_X\le\nu(K)\cdot E_n(x^*)_X,$$

где $\nu(K) = \|K\|_{X\to Y} \cdot \|K^{-1}\|_{Y\to X}$ *– число обусловленности оператора* $K : X \to Y$*, а* $E_n(x^*)_X$ *– наилучшее приближение функции* $x^* \in X$ *алгебраическими полиномами степени не выше* $n-1$.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-го рода.* – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 230 с.

3. Еникеева С. Р. *Об одном методе решения интегральных уравнений* // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 2. – С. 14–19.

4. Еникеева С. Р. *Исследование сплайн–методов решения слабосингулярных интегральных уравнений* // Сб. трудов XXVII Межд. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-27». – Саратов: Саратовский гос. техн. унив. им. Ю.А. Гагарина, 2014. – С. 39–40.

METHOD OF THE LEAST SQUARES FOR SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

S.R. Enikeeva

In this paper, a singular integral equation is investigated. We show that the least square method converges to the solution of this equation.

Keywords: weakly singular integral equations, least square method, polynomial approximation, convergence of the method.

УДК 514.764

ГЕОМЕТРИЯ 6-МЕРНОГО *h*-ПРОСТРАНСТВА ТИПА [(33)]

З.Х. Закирова[1]

1 *zakirova-kgeu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Изучение геометрических свойств многомерных пространств является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение. Известно, что пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования приводят к фундаментальным полевым и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических. Интерес к многомерным теориям также связан с развитием суперсимметричных теорий и теории супергравитации. Как известно, в основе суперсимметричных теорий лежит увеличение размерности используемого многообразия. Целью данной статьи является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ *с сигнатурой* $[++----]$*, которые допускают группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. В данной работе была найдена метрика* h*-пространства типа* $[(33)]$*, а также указан вид квадратичного первого интеграла уравнений геодезических этого* h*-пространства.*